КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ

ИСТРАЖИВАЧКИ МИНИ ПРОЈЕКТИ УЧЕНИКА

(Geogebra, примена)

одељења 3-9

Земунска гимназија, 2020.

Предговор

Да би се ученици добро припремили за изазове који су пред њима у свакодневном животу и професионалном напретку неопходно је да уз основне вештине, знања и математчку писменост развију и вештине које се односе на тимски рад, решавање проблема, истраживање, прикупљање и обраду информација и управљење временом уз коришћење информационих технологија. Реализација мини пројеката у настави математике је одличан тренинг за будуће озбиљне пројекте, у било којој области, јер помажу развијању особина које мора да поседује сваки успешан појединац као члан заједнице.

У овој збирци су мини пројекати ученика 3-9 разреда Земунске гимназије који се односе на конусне пресеке и њихове особине. Теме пројеката су различите као и њихови циљеви. Пројекте смо планирали и започели у уобичајеним школским условима, са могућностима окупљања и договарања „очи у очи“. Због тренутног стања, епидемије изазване корона вирусом, рад на пројектима је настављен у другачијим условима где су до пуног изражаја дошле информационе технологије.

Финалне радове представљамо у облику збирке а евалуације мини пројеката урадићемо када се вратимо у школу.

Зорица Маринковић

професор математике

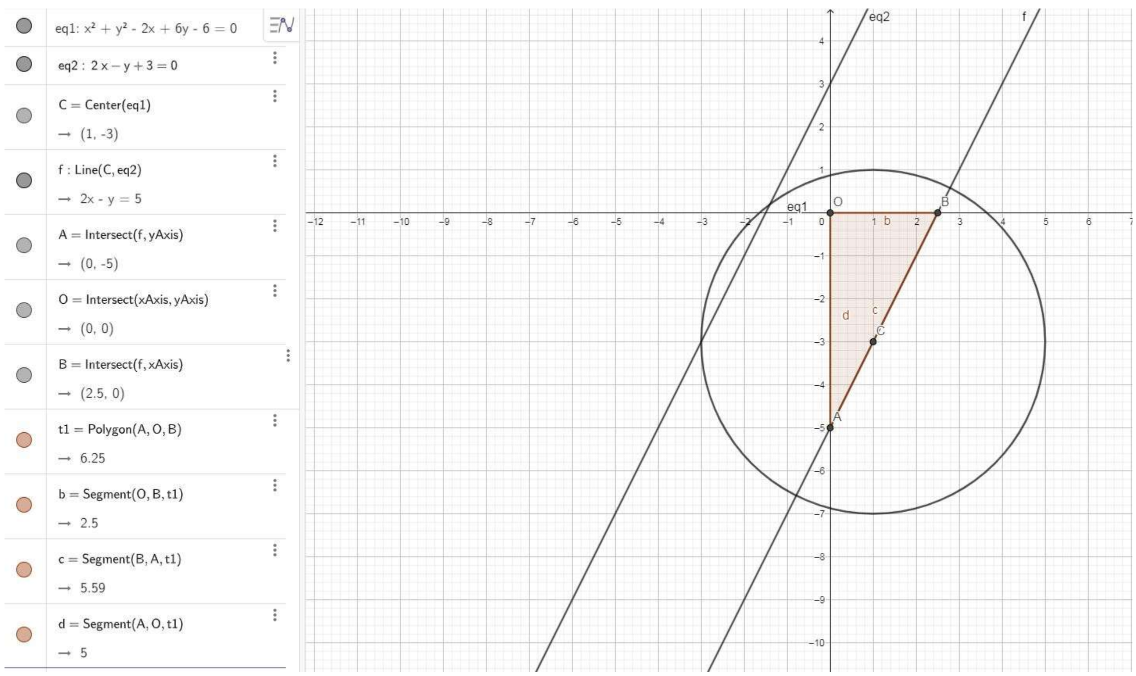
1. ЗАДАЦИ СА ПРИЈЕМНИХ ИСПИТА

Андреа Јовановић
Анђела Павловић
Владимир Жежељ
Павле Покрајчић

1. ФОН 2009. ПРВИ РОК МАТЕМАТИКА (18. задатак)

Права p садржи центар кружнице $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ и паралелна је правој $2x - y + 3 = 0$. површина троугла кога права p образује са координатним осама је:

а) $\frac{9}{2}$ **б)** $\frac{25}{4}$ в) $\frac{25}{6}$ г) $\frac{25}{8}$ д) $\frac{27}{8}$ ђ) Не знам



(1) $k: x^2+y^2-2x+6y-6=0, \quad C(p,q)\in p, \quad p \parallel 2x-y+3=0$

$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \qquad y=2x+3$

$(x-1)^2-1+(y+3)^2-9=6 \qquad \boxed{k=2}$

$(x-1)^2+(y+3)^2=16$

$\boxed{C(1,-3)}$

$y-y_1=k(x-x_1)$

$y+3=2(x-1)$

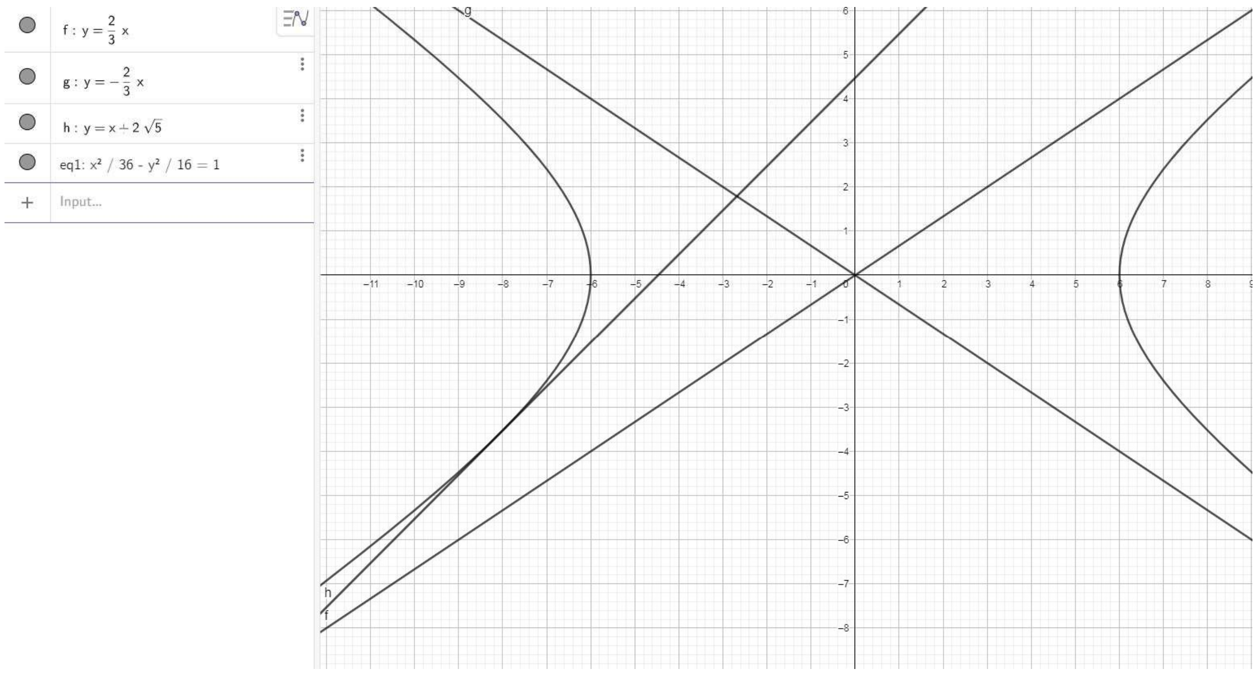
$\boxed{p: y=2x-5}$

$P=\frac{\frac{5}{2}\cdot 5}{2}=\boxed{\frac{25}{4}}$

2. ФОН ТЕСТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 2014-1 (18. задатак)

Ако су праве $y=\frac{2}{3}x$ и $y=-\frac{2}{3}x$ асимптоте хиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, а права $y=x+2\sqrt{5}$ њена тангента, онда је вредност израза a^2+b^2 једнака је:

а) 52 б) 32 в) 40 г) 64 д) 61 ђ) Не знам



② $y=\frac{2}{3}x$, $y=-\frac{2}{3}x$, $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $t: y=x+2\sqrt{5}$, $a^2+b^2=?$

$\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$

$\boxed{k=1 \quad n=2\sqrt{5}}$

$3b=2a$

$\boxed{a=\frac{3b}{2}}$

$a^2k^2-b^2=n^2$

$\frac{9b^2}{4}-b^2=20 \quad /\cdot 4$

$9b^2-4b^2=80$

$\boxed{b^2=16}$

$a=\frac{3b}{2}$

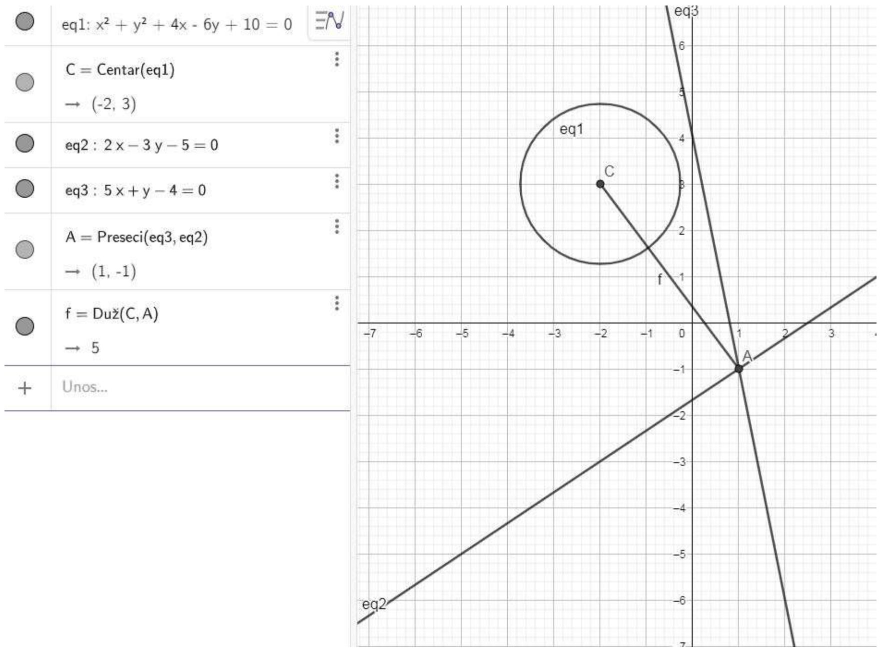
$\boxed{a^2=36}$

$\boxed{a^2+b^2=52}$

3. ФОН 2012. (6. задатак)

Растојање центра кружнице $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 10 = 0$ од пресечне тачке правих $2x - 3y - 5 = 0$ и $5x + y - 4 = 0$ једнако је:

а) 5 б) $\sqrt{10}$ в) 10 г) $\sqrt{17}$ д) $\sqrt{5}$ ђ) Не знам



③ $K: x^2+y^2+4x-6y+10=0,\ 2x-3y=5,\ 5x+y-4=0$

$(x+2)^2-4+(y-3)^2-9=-10$ $\qquad y=-5x+4$

$(x+2)^2+(y-3)^2=3$ $\qquad 2x-3(-5x+4)=5$

$\boxed{C(-2,3)}$ $\qquad 2x+15x-12=5$

$17x=17$

$\boxed{A(1,-1)}$

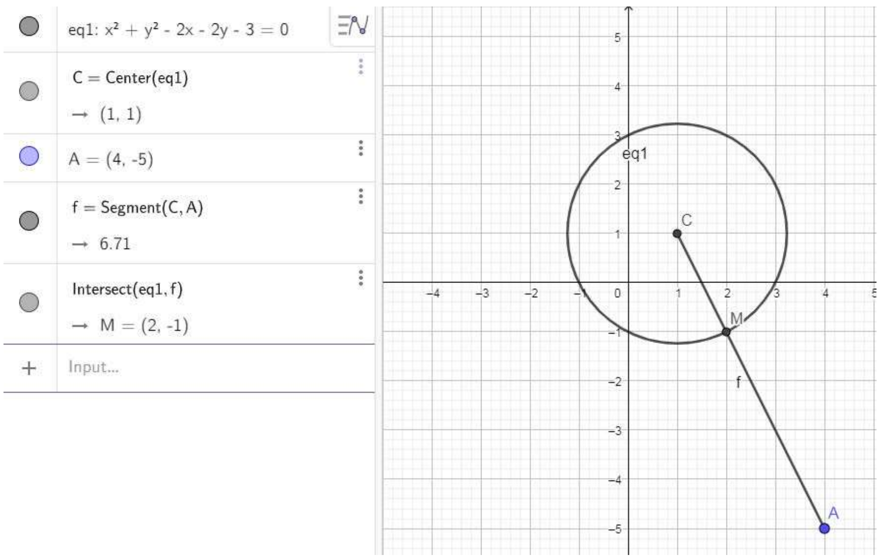
$AC=\sqrt{9+16}$

$\boxed{AC=5}$

4. ФОН 2008. ПРВИ РОК (7. задатак)

Ako je M(x_0,y_0) тачка кружнице $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ која је најближа тачки A(4,-5), онда је збир $x_0 + y_0$ једнак:

а) 1 б) -2 в) $\frac{5}{2}$ г)2 д) -1 ђ) Не знам



④ $M(x_0,y_0) \in k: x^2+y^2-2x-2y-3=0, \ A(4,-5)$

$(x-1)^2+(y-1)^2=5$

$\boxed{C(1,1)}$

$AC=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

$MA=3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}=\sqrt{20}$

$20=(4-x)^2+(-5-y)^2$

$16-8x+x^2+25+10y+y^2=20$

$x^2-8x+y^2+10y=-21 \quad (-1)$

$x^2-2x+y^2-2y=3 \quad +$

$6x-12y=24$

$x=\frac{24+12y}{6}=\frac{\cancel{6}(4+2y)}{\cancel{6}}$

$\boxed{x=4+2y}$

$x^2-2x+y^2-2y=3$

$16+16y+4y^2-8-4y+y^2-2y=3$

$5y^2+10y+5=0 \, / :5$

$y^2+2y+1=0$

$y_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}$

$y=-1 \quad x=2$

$\boxed{M(2,-1)}$

$\boxed{x+y=1}$

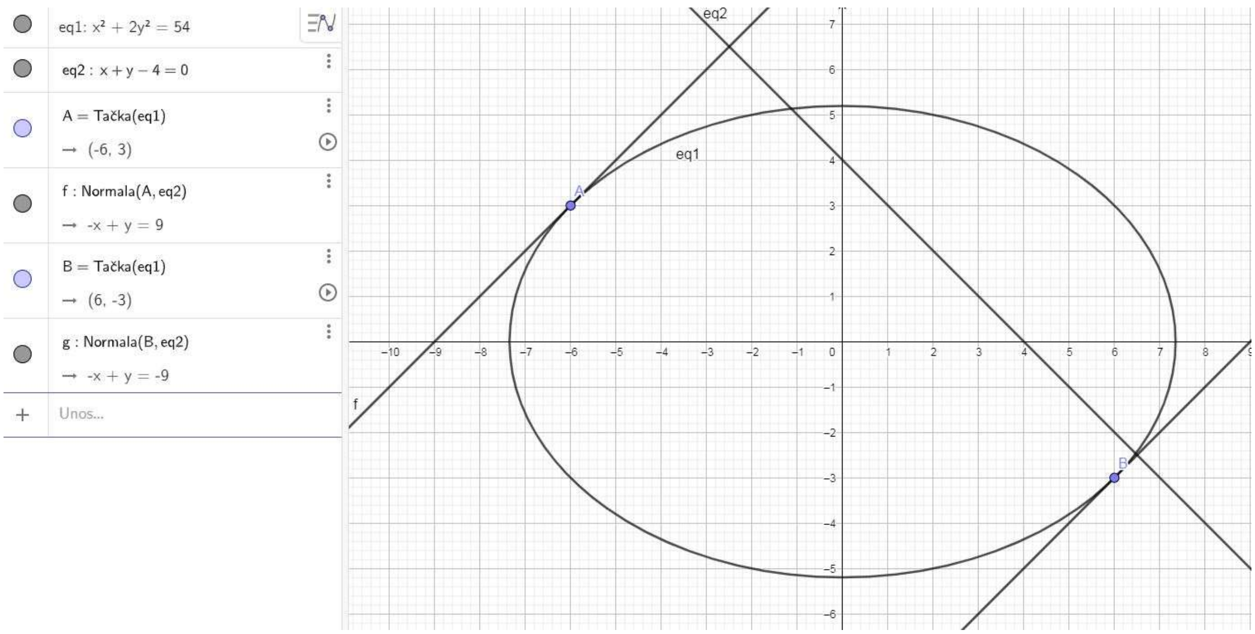
5. ФОН 2009. ДРУГИ РОК (15. задатак)

Једначине тангенти елипсе $x^2 + 2y^2 = 54$ које су нормалне на праву $x + y - 4 = 0$ су:

а) $y = x + 3, y = x + 4$ б) $y = 2x + 1, y = 2x - 1$

в) $y = -x - 5, y = -x + 5$ **г)** $y = x - 9, y = x + 9$

д) $y = x + 2, y = x - 3$ ђ) Не знам



5 $\mathcal{E}: x^2+2y^2=54 \,/^{54}$, $x+y-4=0$

$\frac{x^2}{54}+\frac{y^2}{27}=1$ $y=-x+4$

$k_1=-1$

$\boxed{k_2=1}$

$a^2k^2+b^2=n^2$

$54+27=n^2$

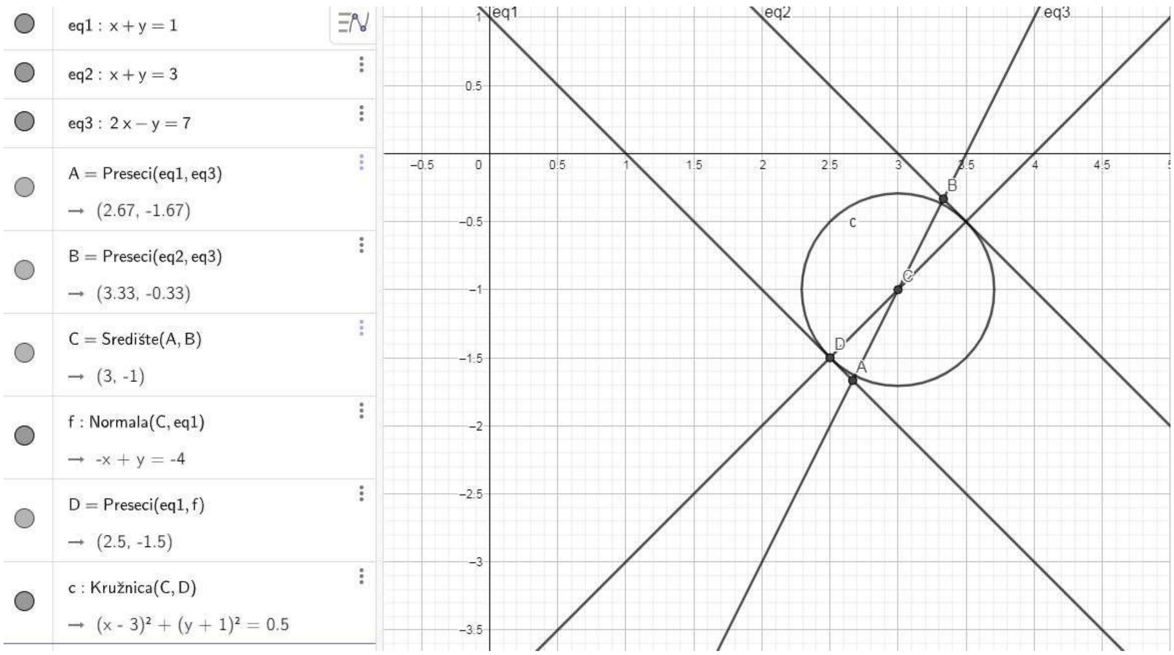
$n=\pm 9$

$\boxed{\begin{aligned} y_1&=x-9\\ y_2&=x+9\end{aligned}}$

6. ФАКУЛТЕТ ГРАЂЕВИНЕ 2012. (18. задатак)

Праве $x + y = 1$ и $x + y = 3$ су тангенте кружнице K. Ако њен центар $C(p,q)$ припада правој $2x - y = 7$ и ако је r њен полупречник, онда је $p^2 + q^2 + 2r^2$ једнако:

а) 10 **б)** 11 в) 12 г) 2 д) 9 ђ) Не знам



⑥ $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x+y=3 \end{matrix}\right\} t\ K$ $\quad C(p,q) \in 2x-y=7,\ p^2+q^2+2R^2=?$

$k_1 = -1$ $\qquad k_2 = 1$

$x+y=1$ $\qquad x+y=3$ $\qquad y+1=1(x-3)$ $\qquad R = CD = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}$

$y=2x-7$ $\qquad y=2x-7$ $\qquad y=x-4$ $\qquad R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x+2x-7=1$ $\qquad x+2x-7=3$ $\qquad x+y=1$ $\qquad p^2+q^2+2R^2 = 9+1+2\frac{2}{4}$

$x=\frac{8}{3}\ \ y=-\frac{5}{3}$ $\qquad x=\frac{10}{3}\ \ y=-\frac{7}{3}$ $\qquad x+x-4=1$ $\qquad \boxed{p^2+q^2+2R^2=11}$

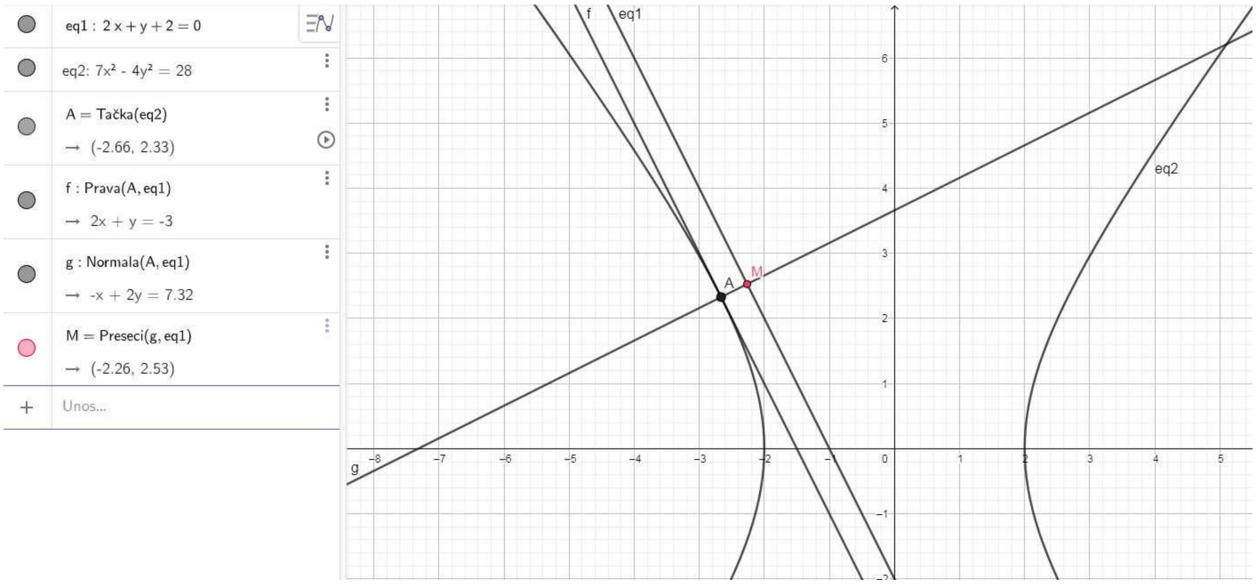
$A\left(\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ $\qquad B\left(\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}\right)$ $\qquad x=\frac{5}{2}\ \ y=-\frac{3}{2}$

$\boxed{C(3,-1)}$ $\qquad D\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

7. ФАКУЛТЕТ ГРАЂЕВИНЕ 2014. (18. задатак)

Тачка M(x,y) на правој $p: 2x + y + 2 = 0$ најближа је хиперболи $7x^2 - 4y^2 = 28$.Тада је $5y - 5x$ једнако:

а) 20 **б)** 25 **в)** 24 г) -25 д) -20 ђ) Не знам



⑦ $M(x,y) \in p: 2x+y+2=0, \quad \mathcal{H}: 7x^2-4y^2=28 /^{28}$

$y=-2x-2 \qquad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{7}=1$

$k_t=-2$

$a^2k^2-b^2=n^2$

$n=\pm 3$

$\boxed{t: y=-2x-3}$

$y=-2x-3$

$7x^2-4y^2=28$

$7x^2-16x^2-48x-36=28$

$-9x^2-48x-64=0 /^{(-1)}$

$9x^2+48x+64=0$

$x_{1,2}=\frac{-48\pm\sqrt{2304-2304}}{18}$

$x=-\frac{8}{3} \quad y=\frac{7}{3}$

$A\left(-\frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$

$k=\frac{1}{2}$

$y-\frac{7}{3}=\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{11}{3}$

$2x+y+2=0$

$2x+\frac{1}{2}x+\frac{11}{3}+2=0$

$x=-\frac{34}{15} \quad y=\frac{38}{15}$

$\boxed{M\left(-\frac{34}{15}, \frac{38}{15}\right)}$

$5y-5x=\cancel{5}\frac{38}{\cancel{15}_3}-\cancel{5}\left(-\frac{34}{\cancel{15}_3}\right)=$

$=\frac{38}{3}+\frac{34}{3}=\frac{72}{3}$

$\boxed{5y-5x=24}$

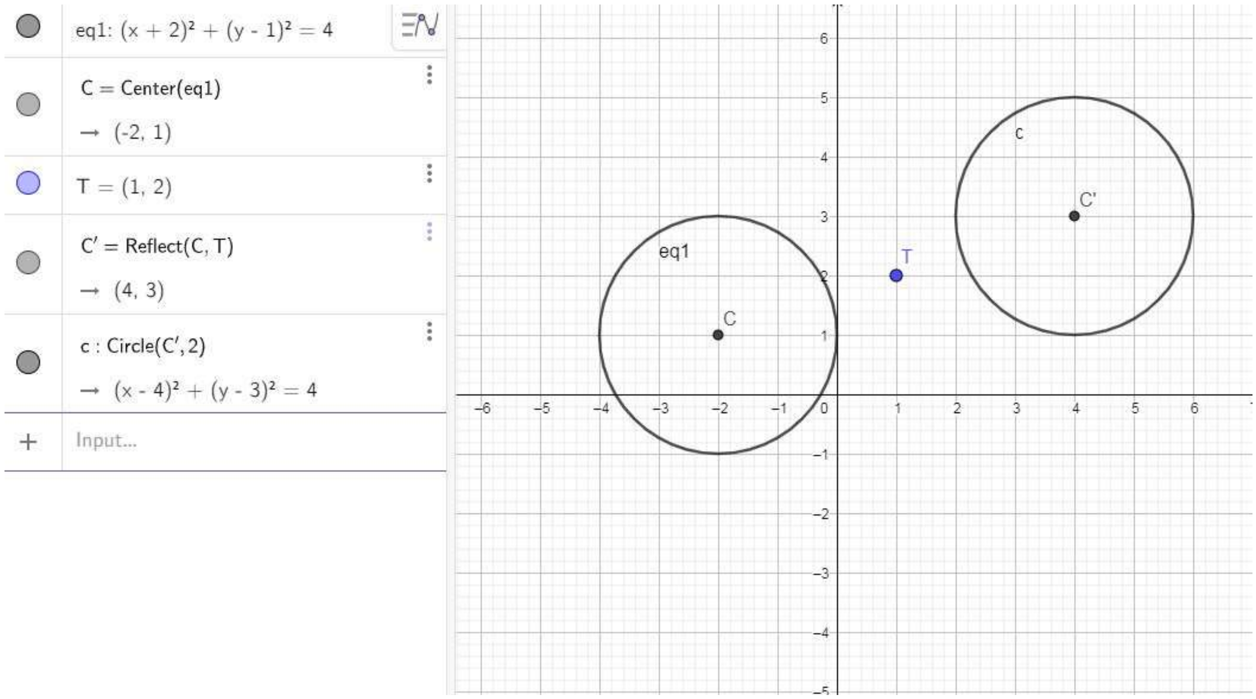
8. МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ 2008. (15. задатак)

Једначина круга симетричног кругу $(x+2)^2 + (x-1)^2 = 4$ у односу на тачку T(1,2) је:

а) $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 21 = 0$ б) $x^2 - \frac{1}{4}x + y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{7}{2} = 0$

в) $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$ г) $x^2 - x + y^2 - 2y + 1 = 0$

д) $x^2 + 8x + y^2 + 6y + 21 = 0$ ђ) Не знам



8 $K: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4, \ T(1,2)$

$C(-2,1)$

$\frac{-2+x}{2} = 1 \qquad \frac{1+y}{2} = 2$

$x = 4 \qquad y = 3$

$\boxed{C'(4,3)}$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$

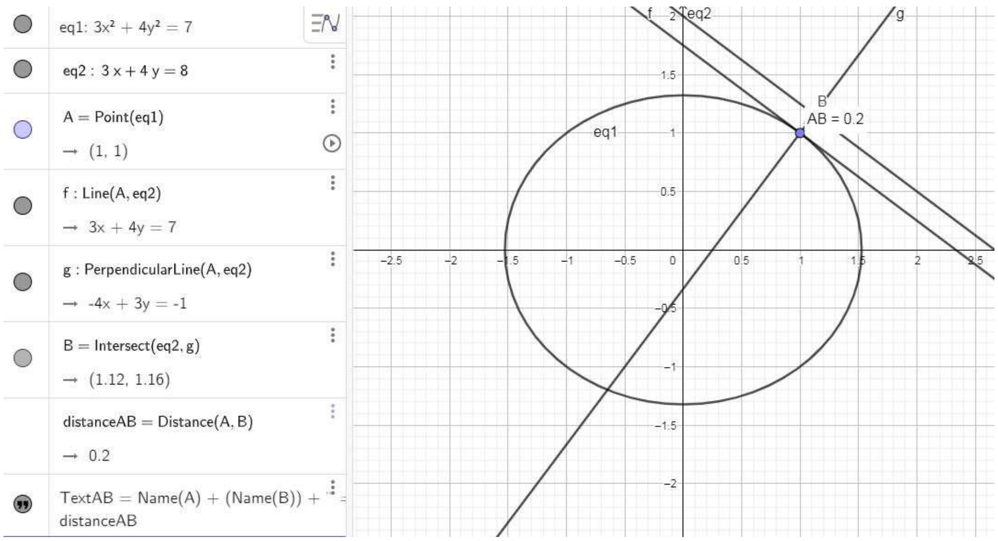
$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 - 4 = 0$

$\boxed{K: x^2 - 8x + y^2 - 6y + 21 = 0}$

9. ФАКУЛТЕТ ГРАЂЕВИНЕ 2017/18. (18. задатак)

Дати су елипса $3x^2 + 4y^2 = 7$ и права $3x + 4y = 8$. Ако је А тачка елипсе најближа правој, онда је њено растојање од праве једнако:

а) 3 **б) $\frac{1}{5}$** в) $\frac{3}{5}$ г) $\frac{4}{5}$ д) $\frac{7}{5}$ ђ) Не знам



9) $\varepsilon: 3x^2+4y^2=7 \;/:7, \quad 3x+4y=8$

$$\frac{x^2}{\frac{7}{3}}+\frac{y^2}{\frac{7}{4}}=1 \qquad \boxed{k_1=-\frac{3}{4}}$$

$$a^2k^2+b^2=n^2$$

$$\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{16}+\frac{7}{4}=n^2$$

$$n^2=\frac{49}{16}$$

$$n=\pm\frac{7}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}\\ 3x^2+4y^2&=7\end{aligned}\right\} \boxed{A(1,1)}$$

$$k_2=\frac{4}{3}$$

$$y-1=\frac{4}{3}(x-1)$$

$$\boxed{y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}}$$

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$$

$$3x-4y=8$$

$$3x-4\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)=8$$

$$3x+\frac{16}{3}x=\frac{28}{3}$$

$$\frac{25}{3}x=\frac{28}{3}$$

$$x=\frac{28}{25} \qquad y=\frac{29}{25}$$

$$\boxed{B\left(\frac{28}{25},\frac{29}{25}\right)}$$

$$AB=\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2+\left(\frac{4}{25}\right)^2}$$

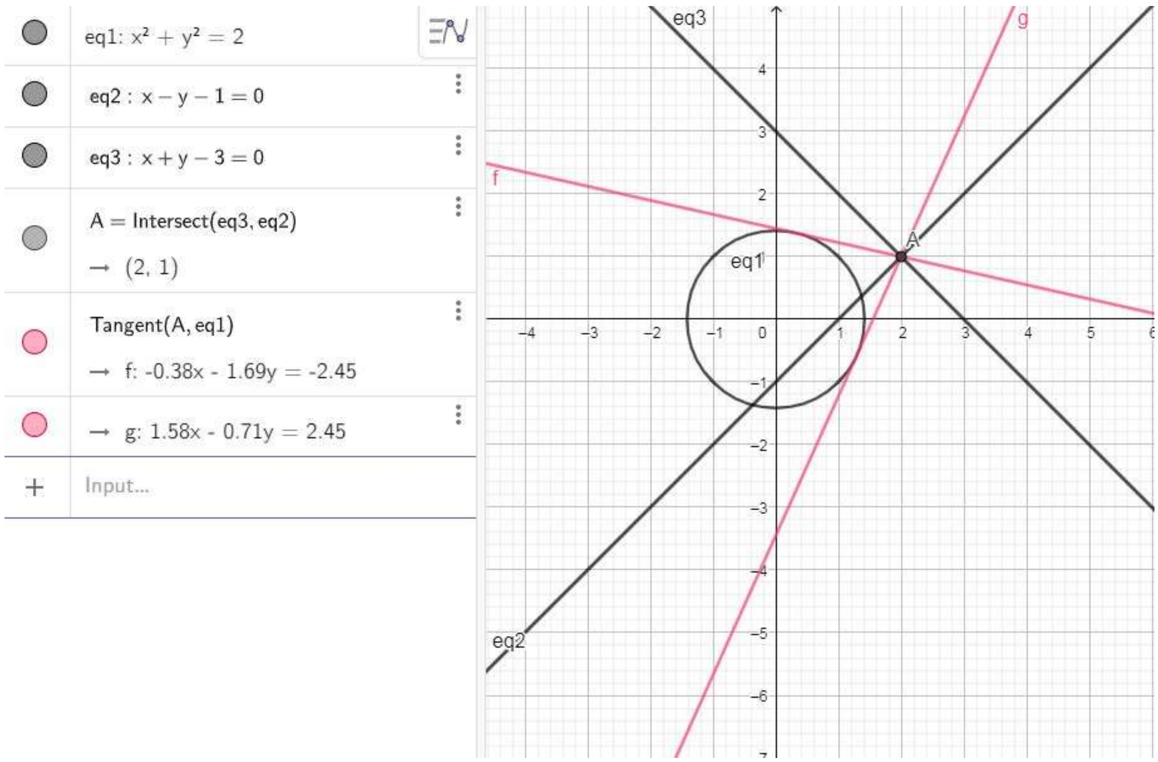
$$AB=\frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{25}_{\,5}}$$

$$\boxed{AB=\frac{1}{5}}$$

10. ЕТФ 2005. (9. задатак)

Збир коефицијената правца тангенти кружнице $x^2 + y^2 = 2$ које садрже пресечну тачку правих $x - y - 1 = 0$ и $x + y - 3 = 0$ је:

а) 2 б) $\sqrt{6}$ в) -2 г) $-\sqrt{6}$ д) $2\sqrt{6}$ ђ) Не знам



(10) $k: x^2+y^2=2,\ x-y-1=0,\ x+y-3=0,\ k_1+k_2=?$

$C(0,0)$

$x-y-1=0 \Rightarrow y=x-1$

$x+y-3=0$

$x+x-1-3=0$

$2x=4$

$x=2 \quad y=1$

$\boxed{T(2,1)}$

• $(1+k^2)r^2=(kp-q+n)^2$

$y=kx+n$

$1=2k+n$

• $n=1-2k$

$(1+k^2)2=(k\cdot 0-0+1-2k)^2$

$2+2k^2=1-4k+4k^2$

$2k^2-4k-1=0$

$k_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+8}}{4}=\frac{4\pm 2\sqrt{6}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{k_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2}}$ $\boxed{k_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}}$

$k_1+k_2=\frac{2+\sqrt{6}}{2}+\frac{2-\sqrt{6}}{2}=\frac{2+\sqrt{6}+2-\sqrt{6}}{2}=\frac{4}{2}$

$\boxed{k_1+k_2=2}$

2. КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ И ОПТИКА

Никола Остојић
Марко Милићевић
Милан Родић

Оптика је грана физике која проучава светлост и особине светлости, оптичке инструменте, огледала (геометријска оптика) и таласну природу светлости.

Геометртијска оптика се бави принципима који омогућавају стварање ликова и слике преко сочива, огледала, призми и других инструмената који користе светлост.

Оптички инструменти су: равна, сферна конкавна (удубљена) и сферна конвексна (испупчена) огледала, оптичка сочива, оптичке призме или њихове комбинације као и сложени оптички инструменти.

Преламање светлости

Преламање светлости је промена правца кретања светлости услед промене брзине светлости. Догађа се на граничним површинама између две средине различитих оптичких густина.

Упадни и преломни зрак заједно са нормалом леже у истој равни.

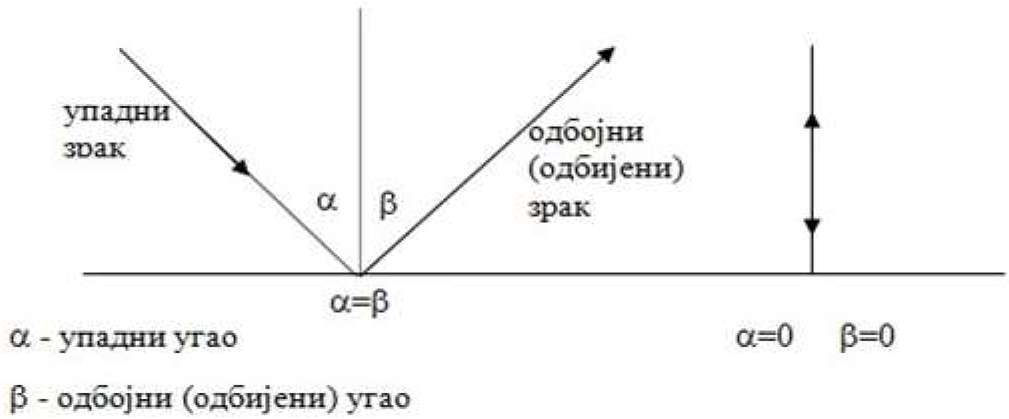
Када светлосни зрак прелази из оптички ређе у оптички гушћу средину упадни угао је већи од преломног, а када прелази из оптички гушђег у оптичко ређи онда је преломни зрак већи од упадног зрака.

Ферматов принцип по којем светлосни зраци увек путују најкраћим путањама.

Одбијање светлости

Овде разматрамо углове између правих које секу конус и њихових тангентних линија у додирним тачкама, који се зову упадни, односно одбојни углови. Као што је познато из оптике, када се зрак светлости одбије од огледала, упадни угао је једнак одбојном.

У следећим примерима видећемо одбијање светлости код конусних пресека.

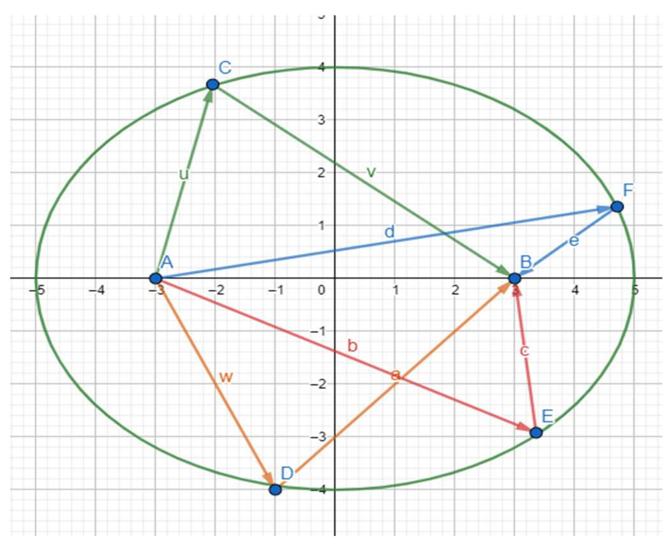


Особине елипсе и кружнице у оптици

Светлосни зрак који извире из једне жиже елипсе, одбија се о елипсу и пролази кроз другу жижу.

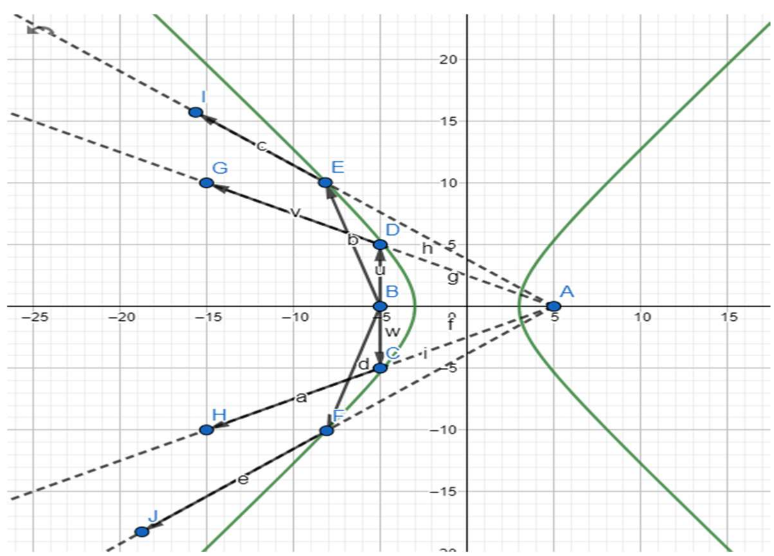
Уколико бисмо направили сто за билијар у облику елипсе и ставили по једну лоптицу у жиже, приликом ударца једне, она би се прво одбила о део елипсе (стола), а затим би ударила другу лоптицу.

Такође, уколико зрак светлости крене из центра кружнице он ће се увек одбити о кружницу и опет проћи кроз центар.



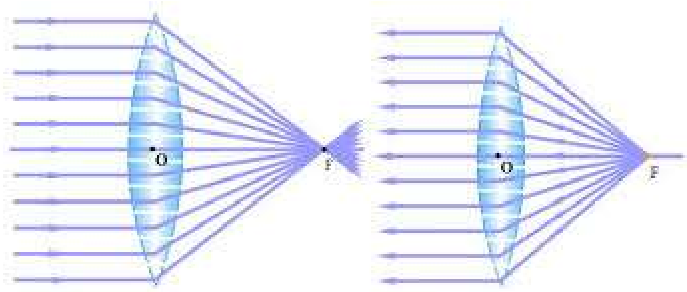
Особине хиперболе у оптици

Светлосни зрак који извире из једне жиже хиперболе и одбија се о хиперболу, има особину да друга жижа хиперболе припада његовом продужетку.



Особине параболе у оптици (преламање светлости)

Најбољи пример за параболу у оптици је сочиво. Најчешће је направљено од стакла или пластике.
Сочива ломе видљиву светлост по законима преламања светлости, узрокујући повећање или смањење слике објекта у зависности да ли је сочиво конкавно или конвексно.На слици је пример сочива који ломи светлост по законима преламања светлости.

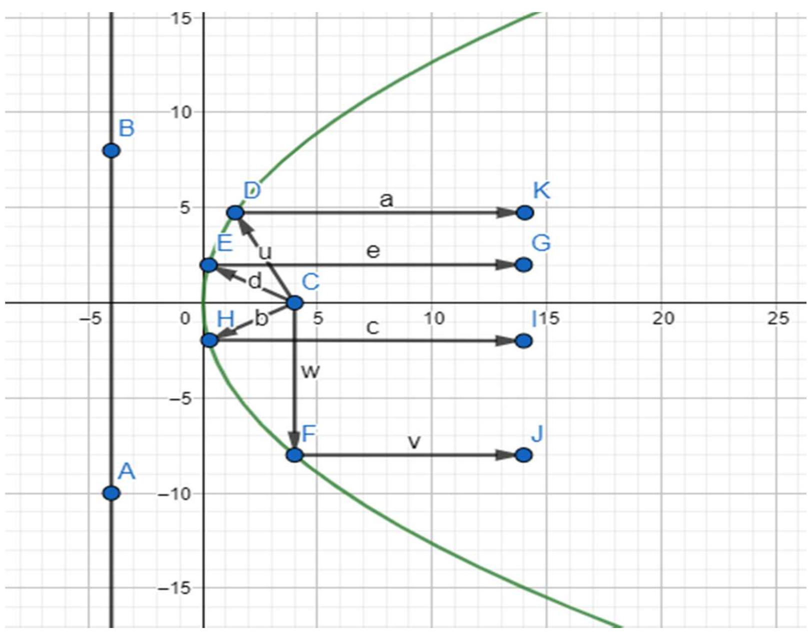


Особине параболе у оптици (одбијање светлости)

Оптичке особине параболе биле су познате у античкој Грчкој.

На пример, Архимед(око 287-212 г.п.н.е.) је правио огледало од бакарних плоча да би запалио римске бродове у опсади Сиракузе.

Светлосни зрак који извире из жиже параболе одбија се о параболу паралелно њеној оси.



Примена параболе у оптици

Уколико се заротира парабола, добија се ротациони параболоид који има исту осу и жижу као полазна парабола.

Светлосни зраци који излазе из жиже параболоида одбијају се паралелно његовој оси.

Та оптичка особина има велику примену у индустрији (оптика и телекомуникација):
Параболичке антене и радари (таласи долазе паралелно оси параболоида и одбијају се кроз његову

жижу у којој се налази пријемник).
Фарови аутомобила, рефлектори (извор светлости је у жижи, а сноп светлости се одбија паралелно оси параболоида).
Рефракторски телескопи (у себи садрже огледало које фокусира паралелне зраке светлости који се одбијају од објекта који посматрамо. Зраци се даље системом огледала доводе до окулара и ми видимо објекат).

Занимљивост за крај: облик прозора на Лондонском солитеру 2013. године довео је до тога да су се у близини зграде десили пожари за које је установљено да да су изазвани ефектом сабирања сунчевих зрака. На слици се види поменута зграда и део улице преко пута зграде где се светлост фокусирала.

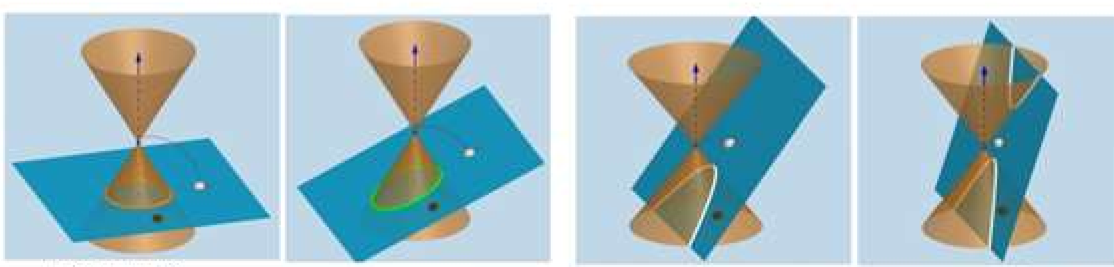
https://www.bbc.com/news/magazine-23944679

3. Историја конусних пресека

Павле Тодоровић
Никола Јеленковић
Борис Кривокапић
Милорад Костадиновић

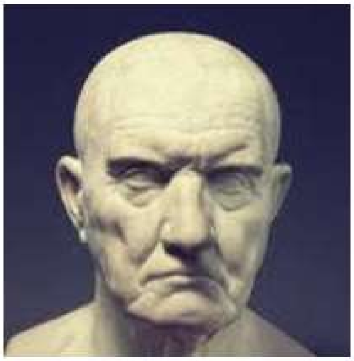
Историја конусних пресека датира још из доба старе Грчке. Сматра се да их је први открио **Менехмо**. Он је такође био и Платонов ученик, као и тутор Александра Великог. На жалост, његов рад није сачуван те о њему сазнајемо само из спомињања његових савременика. У старој Грчкој су конус цртали обртањем правоуглог троугла око једне од катета. Конусни пресеци су се добијали пресеком равни и овог конуса. Облик конуса се одрђивао посматрањем угла између равни и теменог угла, уколико је он оштар добија се елипса, ако је прав парабола, а ако је туп хипербола.

Конусни пресеци

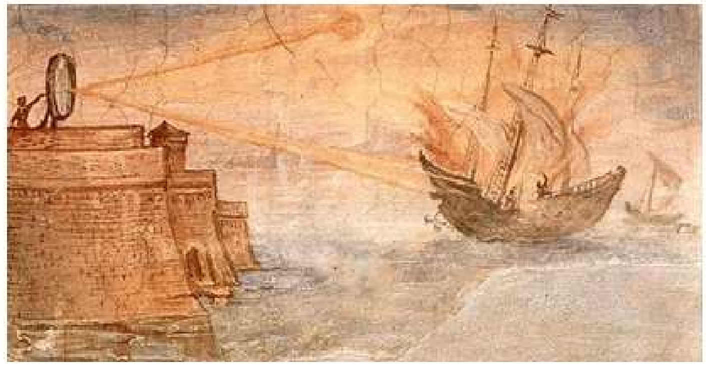


кружница елипса парабола хипербола

Сматра се да се конусним пресецима бавио и **Еуклид**, међутим, његови радови нису сачувани. **Архимед** је такође посматрао конусне пресеке, а највише параболу. Неки од његових радова попут ,,Расправе о квадратури параболе" сачувани су и данас.



Менехмо



Архимедово огледало

У истраживању конусних пресека посебно је допринео **Аполоније из Перге**, грчки математичар и астроном. Он је написао осам књига, сачињених од 787 ставова посвећених конусним пресецима. Он је први дао основне теорије о сва три облика конусних пресека (круг се сматра посебним случајем елипсе). О томе се говори у првој књизи. Такође је први уочио да се хипербола састоји из две гране, изучавао је њене асимптоте и нацртао њене тангенте. О томе говори друга књига. У трећој књизи Аполије дефинише параболу као скуп тачака које испуњавају услов да им је квадрат растојања од

једне праве једнак производу растојања до друге две праве. У четвртој књизи проучава највећи број тачака у којима конуси могу да се секу. Пета књига се састојала од највише хипотези од свих - 77. У предговору је написано да књига говори о максималним и минималним правама, али ови називи кроз књигу нису објашњени. Шеста књига говори о подударности и сличности конуса, а седма о њиховим пречницима. Он је први користио називе парабола, хипербола и елипса. Иако му није био познат алгебарски начин записивања конусних пресека, многи његови резултати се могу записати на овај начин.

Последњи математичар из античке Грчке који је проучавао конусне пресеке био је **Папо из Александрије**. У свом делу ,,Колекција“ обједињује сазнања својих претходника и такође уводи појмове фокус и директриса.

Персијски математичар, физичар и астроном **Ал-Кухи** је осмислио први прави инструмент за цртање конусних пресека. Користећи пресек две параболе, он је решио проблем уписивања једнакостраничног петоугла у квадрат. Други персијски математичар **Омар Ал-Хајам** превео је пету, шесту и седму Аполонијеву књигу. Такође је користио параболу у решавању кубних једначина.

Ал-Кухи

Ал-Хајам

Све до ренесансе у остатку Европе људи се нису бавили конусним пресецима. Први помак били су Кеплерови записи. Јохан Кеплер је поставио три теорије познате хао ,,Кеплерови закони“. Први Кеплеров закон био је најзначајнији за истраживање конуса. Он је уочио да се планете око Сунца окрећу по замишљеној елипси, као и да се Сунце налази у жижи те елипсе. И за разлику од Аполонија, који је разликовао само три конусна пресека, Кеплер је разликовао пет: круг, параболу, хиперболу, елипсу и праву.

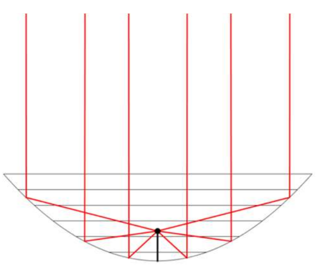
Јохан Кеплер

Рене Декарт је са **Пјером Фермом** поставио темеље данашње аналитичке геометрије. Они су проблеме везане за конусне пресеке сводили на алгебарске изразе и тако их решавали. **Џон Волис** први је, крајем 17. века, дефинисао конусне пресеке као једначине другог степена.

Рене Декарт

Пјер де Ферма

У време када су се конусним пресецима бавили први математичари, они нису имали велики значај за живот човека. Међутим, данас је немогуће замислити живот без наочара за вид, фотоапарата, камера и пријемника радио-таласа, па и игре „билијар". Сви ови изуми засновани су на особинама ових геометријскаих фигура.



Антена, радио-пријемника се налази

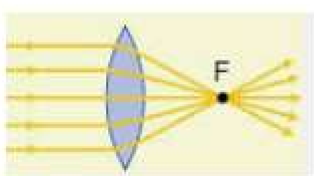
у жижи ове параболе

4. Екологија и конусни пресеци

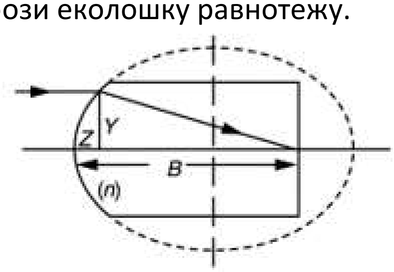
Лука Марјановић
Филип Чадиковски
Матија Самарџија

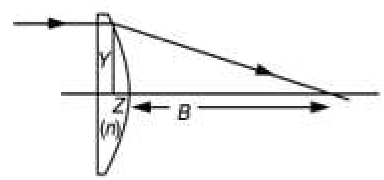
Екологија је наука о животној средини. Име науке потиче од грчких речи **oikos** што значи живот и **logos** што значи наука. Животна средина није самоодржива и на њу велик утицај има човек са својим активностима. Навешћемо неколико примера присутности математике, посебно **конусних пресека**, у анализи неких појава изазваних недовољном пажњом човека.

Сунчеви зраци током сунчаног дана могу да допру до флаше са водом, на пример кроз прозор аутомобила. Закривљеност стакла флаше затим концентрише сунчеве зраке на једну тачку у којој се развија висока температура, тј. стакло флаше се понаша као сабирно сочиво. Због тога може да дође до стварања пламена на тој тачки уколико је флаша позиционирана на неком месту са запаљивим материјалом. Стаклена флаша или њени делови могу да изазову пожар у шуми тако што ће се запалити суво лишће и чак да изазове пожар и угрози еколошку равнотежу.



сабирно сочиво

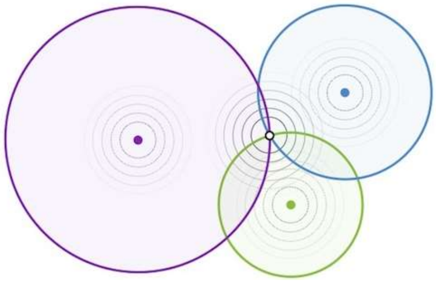




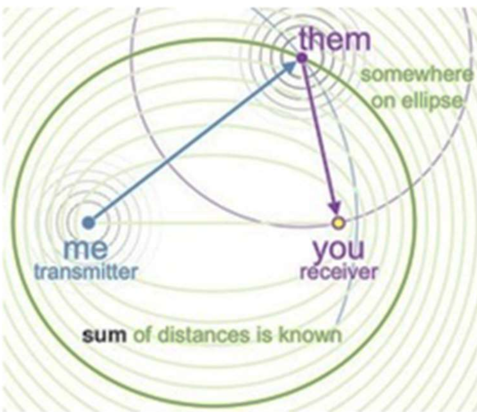
Овде до изражаја долазе особине елипсе. Светлосни зраци се концентришу у жижи (фокусу) елипсе и ту се развија највиша температура.

Системи лоцирања и навођења такође су повезани са екологијом а користе својства конусних пресека. GPS (Global Positioning System) је навигациони систем који користи 24 сателита који се налазе у орбити Земље и пружа навигационе информације за положаје било где у свету.

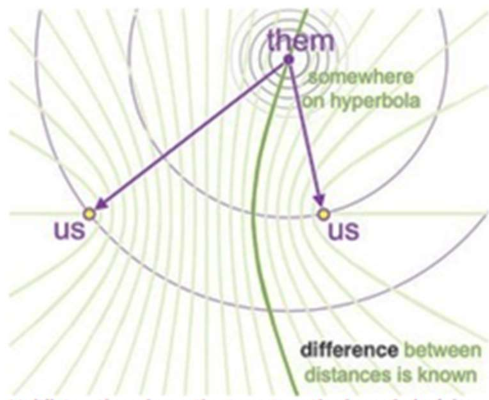
Три сателита су потребна да би се нашла висина, географска ширина и дужина. Овај поступак зове се трилатерација и ако би се посматрало дводимензионо слика би била оваква:



Постоје различите врсте радара и они користе елипсе или хиперболе (преузето са https://plus.maths.org/content/conic-section-hide-seek):

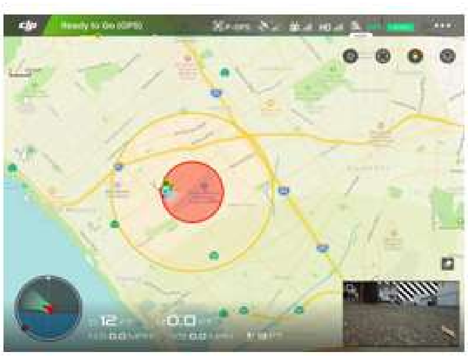


Multireceiver radar places the target on an ellipse (given by $x+y=c$, where c is a constant) where the transmitter (me) and the receiver (you) are at the foci (Image courtesy of Bernard Silverman)



Multilateration places the target on the hyperbola (given by $|x-y|=c$, where c is a constant) with the two receivers at the foci (Image courtesy of Bernard Silverman)

Навигациони системи, поред своје огромне користи у различитим ситуацијама, од свакодневних па до научних истраживања, могу имати утицаја на екосистеме. У последње време честа је употреба дронова у пољопривреди а то представља сметњу за птице које постају дезорјентисане.

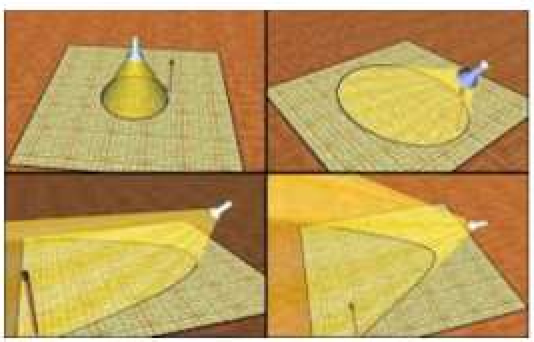


Светлосно загађење је негативни продукт вештачке расвете. Да бисмо решили тај проблем не морамо да угасимо сва светла и да их уклонимо већ да та светла боље распоредимо јер се светлост обично конусно расипа. Једна од последица светлосног загађења је и та да не можемо видети звездано небо. Светлосна интрузија је преливање светлости, вид загађења где улична расвета и остала вештачка расвета ремети природну равнотежу. Најугроженије су ноћне животиње. Сателитски снимак нам показује невероватну слику:

Наша планета ноћу

Улично светло и његова функционалност

Расипање светла је конусно (https://www.tes.com/lessons/xQQ8osyoX30yNA/conic-section). У зависности од узајмног положаја конуса и равни могу се добити сва четири конусна пресека.

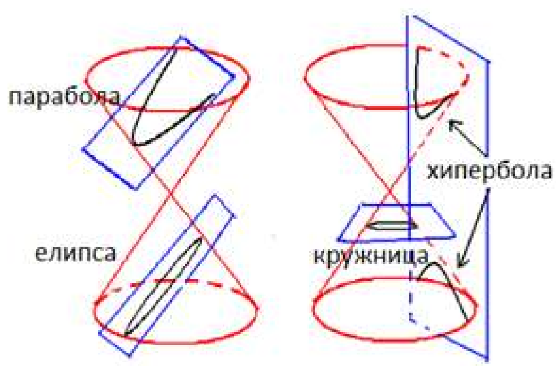


Конусни пресеци се могу применити у животу и науци. Могу нам побољшати и олакшати живот као и сачувати животну средину. Математика је присутна свуда. У сваком облику у природи ми је можемо пронаћи.

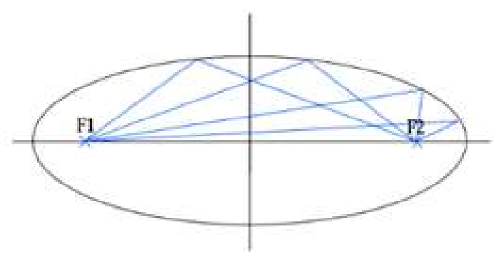
5. Примена конусних пресека у медицини

Марија Перић
Никола Тривановић
Исидора Вуковић
Маша Лукић
Анастасија Вукадиновић

Елипса је скуп свих тачака у равни, геометријско место тачака, чији је збир растојања од две фиксне тачке из исте равни, које зовемо жиже или фокуси (на слици F1 и F2), константан**.** Овај конусни пресек има својство да се, условно речено, зрак који крене из једне жиже, одбија о зид елипсе и погађа другу жижу. То такође важи, не само за светлосне зраке, већ и за друге облике енергије, укључујући ударне таласе. Ударни таласи скупљени у једном фокусу одразиће се од елипсе и проћи кроз други фокус. Ова карактеристика, јединствена за елипсу, инспирисала је корисну медицинску примену.

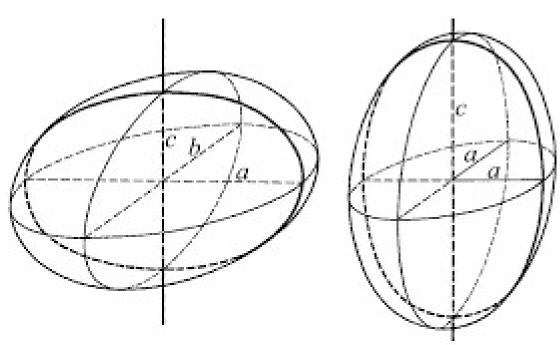


пресек конуса и равни

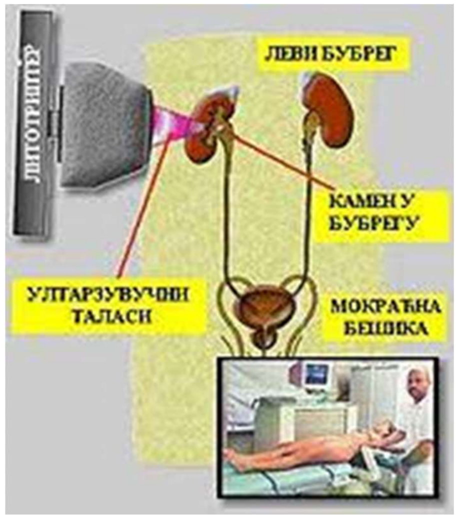


елипса и одбијање зрака

У тродимензионом простору, особине елипсе могу се пренети на елипсоид. Елипсоид је тело које настаје обртањем елипсе око једне својих оса.



Медицински стручњаци су искористили својства елипсе да би направили уређај који ефикасно уклања (разбија) камен у бубрегу и у жучној кеси –литотриптер. Овај уређај користи ударне таласе да би успешно разбио болни камен из бубрега (или жучни камен) у ситне комаде који лако могу проћи кроз тело. Овај процес је познат и као литотрипсија.



Употребом ове методе, значајно се смањује ризик који носи операција. Постоји мања могућност инфекције и потребно је мање времена за опоравак него након оперативног захвата. Математичка својства елипсе дају основу за овај медицински проналазак.

Машина за литотрипсију има део у облику елипсоида, који се ослони на пацијентово тело. Да би поступак био ефикасан, тј. да би литотриптер могао да користи рефлектујуће својство елипсе, пацијентов камен мора бити у једној тачки фокуса елипсоида, а генератор ударног таласа на другом фокусу. Пацијент је положен на сто и постављен у положај поред литотриптера. Лекари користе флуороскопски рендгенски систем да би одржали визуелни изглед камена. То омогућава тачно позиционирање камена. Пошто камен делује као једна од тачака фокуса, неопходно је да камен буде тачно на правој удаљености од фокуса који се налази на литотриптеру. Ово је обавезно како би се ударни таласи усмерили на камен.

Литотриптер такође садржи и уређај за спајање. Ово је потребно да би се омогућио успешан пренос ударног зрака кроз тело. Јастук, налик балону за воду, обмотава се око елипсоида. Јастук је напуњен водом и ослања се на пацијентову страну. Јастук је залепљен за тело пацијента помоћу силиконске мембране. Вода омогућава да ударни таласи сигурно путују кроз ткиво зато што вода и меко ткиво имају сличну густину. Камен има већу густину и разбија се ударним таласима, али меко ткиво трпи само минимална оштећења. Таласи се стварају у једном фокусу и због елиптичног облика се преусмеравају на други фокус, а то је камен. Сви ови таласи узрокују пуцање камена и он се на крају дели у мноштво ситних комада који могу лако проћи кроз тело. Пацијент се обично може вратити кући исти дан и није подвргнут дуготрајном опоравку, који се често захтева након операције. Овај захват је практично безболан. Из тих разлога литотрипсија постаје популаран захват за многе пацијенте.

Ово је само један од примера примене геометријских и метричких својстава елипсе, једног од конусних пресека, у медицини. Има још пуно примера, као што је, рецимо, примена конусних пресека на сочива или наочаре. Иако у том случају кажемо да су у питању оптичка својства, у суштини је иста особина.

Сваки човек има има своје идеје и свој поглед на свет, и то је добро. Међутим, за развој интелекта неопходно је образовање. Само хуман и образован човек може спојити медицину и математику на добробит човечанства.

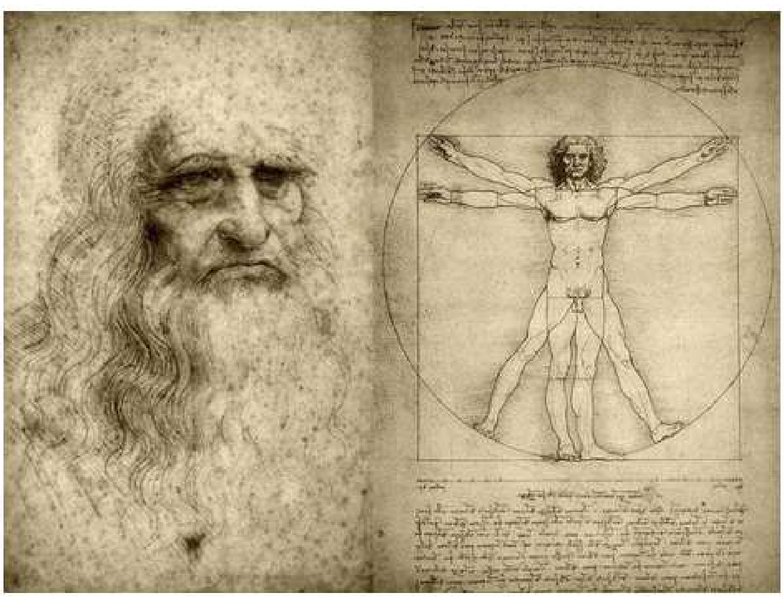
6. Конусни пресеци и уметност

Милица Ћирковић
Марија Шолаја
Јована Срдић
Јована Вуковић
Катарина Марчетић
Тара Чупић

У уметности, сликарству, за неке неочекивано, прилично је заступљена математика, а са њом и конусни пресеци, поготово круг.

Винсент ван Гог, Звездана ноћ

Густав Климт, Пољубац



Леонардо да Винчи је круг искористио за проучавање пропорција на Ветрувијеовом човеку.

У перспективи круг представљамо елипсом, као што је случај на овој слици.

Албрехт Дирер, Меланхолија

Слике су најчешће дводимензионе па сфере представљамо кругом.

Конусни пресеци су присутни и на скицама за слике.

Симбол је цртеж, скулптура, знак, све оно што може стајати уместо нечег другог и да га том приликом препознатљиво репрезентује. Симболи поседују значења која имају културолошку позадину. Симбол нема значење сам по себи, већ само у одређеном контексту. Наводимо неке примере:

јин-јанг

тојота

Розете , мандале, такође поседују одређени симболизам, а све садрже делове који подсећају на конусне пресеке.

Модни трендови, врхунски и свакодневни одевни предмети, у својим дезенима али и у самој структури модела садржи конусне пресеке. У доба рококоа жене су носиле хаљине са толико неприродно широким куковима да је за тај део хаљине постојала посебна конструкција која ју је држала и формирала облик елипсе или круга. Сем у конструкцији, на неким хаљинама се виде украси (карнери, чипка) који подсећеју на параболу.

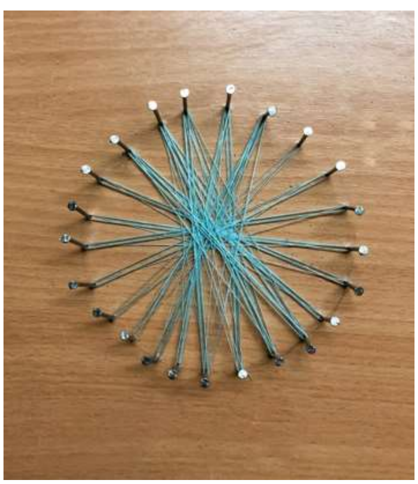
Неки комади накита без обзира на временске одреднице, због лепоте коју поседују, увек привлаче пажњу.

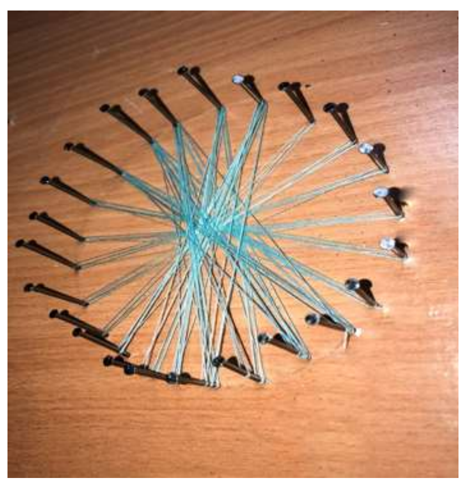
Рококо стил

Кад је реч о моди, додајемо и ово:

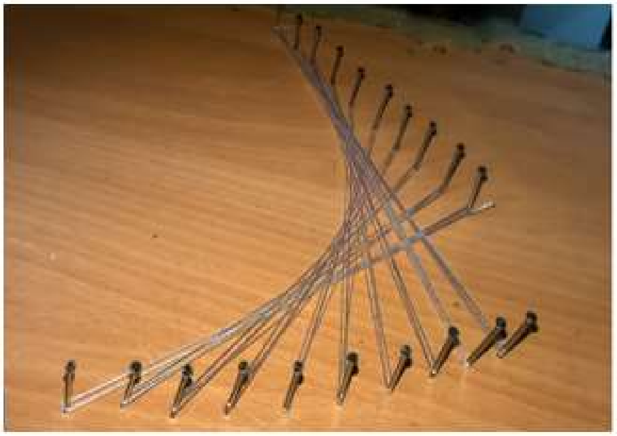
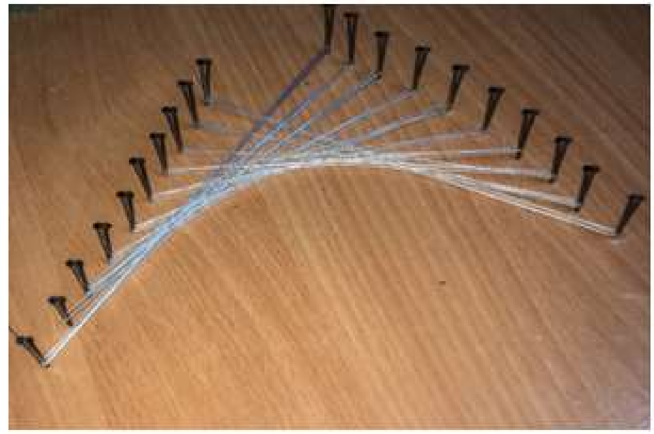
У целом спектру широког схватања уметности може се препознати и стринг арт, тј. уметност стварана нитима. Добијени облици се могу врло разликовати по ономе шта представљају али је начин рада јако сличан.

У зависности од распореда тачака и начина њиховог повезивања нитима могу се добити и конусни пресеци или линије које их прилично добро апроксимирају. Ово су фотографије експоната које смо ми направиле:

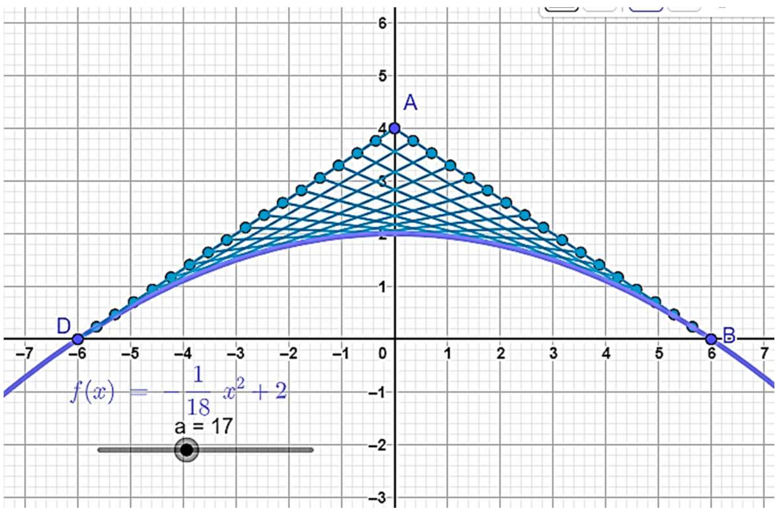




На прве две фотографије ексери су распоређени по кружници а нити су тетиве кружнице. На наредне две фотографије нити се постављају тако да, што је њихов број већи, то је препознатљивија закривљеност параболе. Нити су уствари тангенте.

За стринг арт се може користити и *Geogebra*:



https://www.geogebra.org/m/RSHA4CEp#material/z2CKyHgA

Слајдером се може мењати број нити.

На крају додајемо једно дело холандског математичара и уметника Мориса Ешера у ком су кроз структуру фрактала присутни кружни лукови. Ово дело се може повезати и са геометријом Лобачевског, такозваном хиперболичком геометријом.

7. Конусни пресеци у архитектури

Круг

Немања Вукосављевић
Немања Младеновић
Јана Ваљаревић
Марија Цвијановић

Архитектура, као једна од најбитнијих али и ненаметљивих наука, показује да је немогуће створити нешто што у себи не садржи математику, у овом случају део математике који говори о конусним пресецима. Архитекта ствара тежећи савршенству те с тога користи прорачуне који му то омогућавају да испуни услове највише естетике али и функционалности. У следећим радовима видећете само неке најзанимљивије примере споја математике и архитектуре који су неодвојиви, али и неодољиви: фасаде, облике грађевина, екстеријера, ентеријера. Уз хортикултуру и одговарајућу грађевину све то чини савршен склоп попут првог конусног пресека који смо обрадили, а то је кружница, односно круг.

АРЕНА

Арена је централни отворени простор амфитеатра или неке друге грађевине за јавна надметања или изложбе. У античкој архитектури арена је кружни средишњи део стадиона. У римској, песком насут елиптични простор у средини циркуса или стадиона.

Основна карактеристика арене везана је за функционалност: простор у коме се активност дешава је најнижа тачка па се тако омогућава видљивост. Арене су обично пројектоване тако да могу да приме велик број гледалаца.

Колосеум (Флавијев амфитеатар) је амфитеатар у Риму, највећи амфитеатар на свету који је могао да прими више од 50000 људи. Коришћен је за јавне спектакле, чувен је по гладијаторским борбама.


Колосеум

Пожега, као један од српских градова, један је и од најнеобичнијих што се тиче тргова у Европи. Централни део садржи спомен чесму и амфитеатар који је у функцији окупљања грађана.

Од грађевина у модерној архитектури са кругом се могу повезати:

Алдар – зграда у Абу Дабију

Као што је Ајфелов торањ симбол Француске и Париза тако је и ова зграда грађена да подсећа на новчић са рупом у средини сада симбол града Гуангзхоу:

Следећа грађевина је огроман челични прстен изграђен опет у Кини, у трговачком делу града Фушуне. Ово није стамбена зграда, нити је зграда уопште. Име ове грађевине је Круг живота а сама идеја ствараоца је да нас подсети на ток живота, да све настаје и нестаје.

Кружни лукови су присутни како у функцији очувања стабилности тако и из естетских разлога:

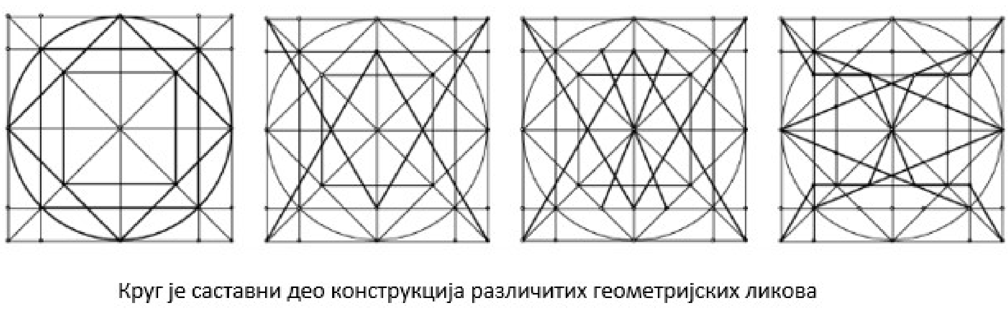
19. век, Немачка

Наводимимо сада још неке примере који нису повезани историјски или стилски али их повезује круг или делови круга који су присутни као структурални грађевински елименти или као украси и симболи на њима.

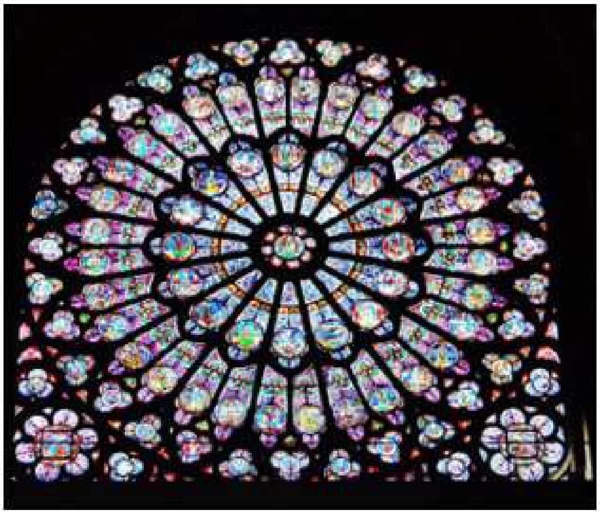
Библиотека Марћана у Венецији

Манастир Љубостиња

Манастир Наупара



Круг је саставни део конструкција различитих геометријских ликова



Витраж, Нотр Дам

Розета, манастир Жича

Архиволт на катедрали у Фрајбергу, Немачка

Криви торањ у Пизи

Велики точак у Бечу

Оранж коцка, Лион

Кружна пирамида, Мексико

Неки кажу да је архитектура уметност, наука, занат, филозофија...Архитекта у свој рад укључује различита знања и таленат: геометрија, аритметика, историја, филозофија, социологија. Не могу се занемарити ни утицаји трендова, посебни захтеви који се односе на цену материјала и функционалност. Оно што се не мења то је веза између математике и архитектуре, имајући на уму различите прорачуне који се односе на статику, али свакако и пре свега присутност геометријских облика.